

О ГЛУБИНЕ ТОЧКИ В ТОЧЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерно-вычислительной математики)

В настоящей статье вводится понятие глубины точки в точечной системе, изучаются некоторые свойства точечных систем, связанные с понятием глубины. Затем обобщается один результат Берча.

Определение. Пусть S_n есть подсистема S_{n+1} , $a \in S_{n+1}$. Величину

$$d(a, S_n) = \min_{x \in S_n} \{ \overline{R(a, x) \cap S_n}, \overline{L(a, x) \cap S_n} \}$$

будем называть глубиной точки a в S_n . Здесь \overline{M} означает число элементов множества M .

По-видимому, понятие глубины точки ранее не вводилось, хотя имеются результаты, относящиеся к глубине. Именно, известна

Теорема. На плоскости дано n точек: a_1, a_2, \dots, a_n . Существует такая точка b в этой плоскости, что по каждую сторону от любой прямой, проходящей через точку b и не проходящей через точки a_1, a_2, \dots, a_n , находится не менее $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ точек [1].

Некоторые теоремы о глубине

Теорема 1. Если $c \in R(a, b)$, то

$$\overline{R(a, b)} \geq d(c, S_n) + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим подсистему $S_m \in S_n$, состоящую из $L(a, b)$ и точек a, b, c . Сечения в системе S_n мы будем обозначать $L(x, y)$ и $R(x, y)$, а сечения в S_m — через $L'(x, y)$ и $R'(x, y)$.

Имеем $R'(a, b) = c$, то есть $L'(b, a) = c$. Тогда по лемме о внешней точке [3], точка c есть внешняя точка в системе S_m ; следовательно, найдется такая точка $d \in S_m$, $d \neq c$, что

$$R'(c, d) = \bar{0}.$$

Но так как система S_m получена из S_n отбрасываем $\overline{R(a, b)} - 1$ точек, то в системе S_n

$$\overline{R(c, b)} \leq \overline{R(a, b)} - 1.$$

По определению глубины $\overline{R(c, b)} \geq d(c, S_n)$, то есть, $d(c, S_n) + 1 \leq \overline{R(a, b)}$, что и требовалось доказать.

Определение. Систему S будем называть выпуклой, если все точки системы — внешние.

Иначе S называется выпуклой, если коэффициент наполнения [5] $P(S) = 0$.

Теорема 2. Пусть $S' \in S$, S' — выпуклая, $a \in S$ и в системе $S'' = S' \cup a$ точка a — внутренняя,

Тогда $d(a, S) \geq 1 + \min_{x \in S'} d(x, S)$.

Доказательство. Так как a — внутренняя точка S'' , то по лемме Каратеодори [3] найдутся такие три точки x_1, x_2, x_3 , что a лежит внутри $\Delta x_1 x_2 x_3$. Пусть $b \in S$. Тогда в пятерке (a, x_1, x_2, x_3, b) точка a — внутренняя, то есть не является внешней.

В самом деле,

$$R(a, x_i) \neq \bar{0}, \quad L(a, x_i) \neq \bar{0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Следовательно, a не может иметь двух смежных внешних точек и поэтому не является внешней в пятерке (a, x_1, x_2, x_3, b) [3].

Поэтому $R(a, b) \cap S_5 \neq \bar{0}$, $L(a, b) \cap S_5 \neq \bar{0}$. Пусть $x_{i_1} \in R(a, b)$, $x_{i_2} \in L(a, b)$. Тогда, на основании теоремы 1,

$$R(a, b) \geq d(x_{i_1}, S) + 1, \quad L(a, b) \geq d(x_{i_2}, S) + 1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d(a, S) &= \min_{b \in S} \{\overline{R(a, b)}, \overline{L(a, b)}\} \geq \\ &\geq \min_i d(x_i, S) + 1 \geq \min_{x \in S'} d(x, S) + 1. \end{aligned}$$

То есть

$$d(a, S) \geq \min d(x, S) + 1.$$

Теорема 3. Пусть точки x_1, x_2, \dots, x_n системы S_n расположены в порядке нестрогого возрастания глубины.

Обозначим S_m подсистему S_n , состоящую из m первых точек x_1, x_2, \dots, x_m . Имеют место равенства

$$d(x_i, S_m) = d(x_i, S_n), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Доказательство. Покажем, что

$$d(x_i, S_{n-1}) = d(x_i, S_n), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ясно, что

$$d(x_i, S_{n-1}) \leq d(x_i, S_n). \quad (1)$$

Докажем обратное неравенство.

Для любого $y \neq x_n$: $d(x_i, S_n) \leq R(x_i, y, S_n)$

и $d(x_i, S_n) \leq L(x_i, y, S_n)$.

Здесь через $R(x, y, S)$ и $L(x, y, S)$ мы обозначаем сечения в системе S .

Пусть $x_n \in R(x_i, y, S_n)$. Тогда по теореме 1:

$$\overline{R(x_i, y, S_n)} \geq d(x_n, S_n) + 1.$$

В системе S_{n-1}

$$\overline{R(x_i, y, S_{n-1})} = \overline{R(x_i, y, S_n)} - 1.$$

Следовательно,

$$\overline{R(x_i, y, S_{n-1})} \geq d(x_n, S_n)$$

и

$$\overline{L(x_i, y, S_n)} = \overline{L(x_i, y, S_{n-1})} \geq d(x_i, S_n).$$

Отсюда

$$d(x_i, S_{n-1}) = \min \{R(x_i, y, S_{n-1}), L(x_i, y, S_{n-1})\} \geqslant \\ \geqslant \min \{d(x_n, S_n), d(x_i, S_n)\}.$$

Так как

$$d(x_n, S_n) \geqslant d(x_i, S_n),$$

то

$$d(x_i, S_{n-1}) \geqslant d(x_i, S_n); \quad (2)$$

сопоставляя (1) и (2), находим

$$d(x_i, S_{n-1}) = d(x_i, S_n).$$

Применяя индукцию, получим

$$d(x_i, S_m) = d(x_i, S_n), \quad i \leqslant m < n.$$

Следствие. В системе S_{2n+1} для двух точек $x, y \in S_{2n+1}$, $x \neq y$ не может выполняться равенство

$$d(x, S_{2n+1}) = d(y, S_{2n+1}) = n. \quad (*)$$

Доказательство. Пусть (*) имеет место. Тогда, по теореме 3,

$$d(x_{2n}, S_{2n+1}) = d(x_{2n}, S_{2n}),$$

то есть

$$d(x_{2n}, S_{2n}) = n. \quad (3)$$

Но последнее равенство невозможно.

В самом деле, пусть $y \in S_{2n}$ таково, что $\overline{R(x_{2n}, y)} = n$.

Зададим двойную циклическую функцию в S_{2n} условием

$$N(x_{2n}, y, S_{2n}) = 1.$$

Пусть y_2 таково, что

$$|N(x_{2n}, y_2, S_{2n})| = 2.$$

Пусть для определенности

$$N(x_{2n}, y_2, S_{2n}) = 2.$$

Тогда, если $z \in R(x_{2n}, y, S_{2n})$, то функция порядка

$$\zeta(x_{2n}, y_1, z) = \operatorname{sgn} \{N(x_{2n}, z_1, S_{2n}) N(x_{2n}, y_1, S_{2n}) \times \\ \times [N^2(x_{2n}, z, S_{2n}) - N^2(x_{2n}, y_1, S_{2n})]\} = \operatorname{Sgn} N(x_{2n}, z, S_{2n}) < 0.$$

и

$$|N(x_{2n}, z, S_{2n})| > 2.$$

Так как

$$y_2 \in R(x_{2n}, y_1, S_{2n}),$$

то

$$\zeta(x_{2n}, y_2, z) = \operatorname{Sgn} \{N(x_{2n}, z, S_{2n}) N(x_{2n}, y_2, S_{2n}) [N^2(x_{2n}, \\ z, S_{2n}) - N^2(x_{2n}, y_2, S_{2n})]\} = \operatorname{Sgn} N(x_{2n}, z, S_{2n}) < 0,$$

то есть

$$z \in R(x_{2n}, y_2, S_{2n}).$$

Значит

$$R(x_{2n}, y_1, S_{2n}) \subset R(x_{2n}, y_2, S_{2n}). \quad (4)$$

Кроме того,

$$y_1 \in R(x_{2n}, y_1, S_{2n}), \quad (5)$$

и

$$\zeta(x_{2n}, y_2, y_1) = \operatorname{Sgn} \{N(x_{2n}, y_1, S_{2n}) N(x_{2n}, y_2, S_{2n}) \times \\ \times [N^2(x_{2n}, y_1, S_{2n}) - N^2(x_{2n}, y_2, S_{2n})]\} = -1.$$

Следовательно:

$$y_1 \in R(x_{2n}, y_2, S_{2n}). \quad (6)$$

Из (4), (5), (6)

$$n = \overline{R(x_{2n}, y_1, S_{2n})} < \overline{R(x_{2n}, y_2, S_{2n})}.$$

Значит

$$\overline{L(x_{2n}, y_2, S_{2n})} \leq n - 1.$$

Откуда $d(x_{2n}, S_{2n}) \leq n - 1$, что противоречит (3), следовательно, (3) невозможно.

К теореме Берча

В работе Берча [2] доказана

Теорема. На плоскости дано $3N$ точек, их можно разбить на N троек так, что N треугольников с вершинами в этих точках имеют общую точку.

Пользуясь понятием глубины точки в системе, мы получим более общий результат.

Обозначим через $t(q)$ наибольшее число треугольников без общих вершин с вершинами в точках S_{n+1} , содержащих точку $q \in S_{n+1}$.

Имеет место

Теорема 4.

$$t(q) = \min \left\{ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, d(q, S_n) \right\}.$$

Доказательство. 1. Пусть точка p_0 такова, что

$$L(q, p_0) = d, \quad \text{где } d = d(q, S_{n+1}).$$

В подсистеме $S' = L(q, p_0) \cup p_0 \cup q$ введем двойную циклическую функцию условием

$$N(q, p_0, S') = 1.$$

Каждой точке $p \in L(q, p_0)$ припишем номер $m = N(q, p, S') - 1$ и будем обозначать p через p_m .

Рассмотрим подсистему $S'' = R(q, p_0) \cup q \cup p_0$. Введем в S'' циклическую функцию условием

$$N(q, p_0, S'') = n - d = p.$$

Точку $\pi \in R(q, p_0) \cup p_0$ будем обозначать π_k , если

$$N(q, \pi, S'') = k, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

2. Лемма 1. Если $p < 2d$, то найдется точка π_i , дающая вместе с p_1 и p_d накрывающий треугольник.

Доказательство. Обозначим

$$\alpha_i = \overline{L(q, p_i) \cap S''}.$$

Здесь $L(x, y)$ и $R(x, y)$ — сечения в S_{n+1} .

Тогда

$$a) \quad 1 \leq \alpha_1 \leq p - d,$$

$$b) \quad d \leq \alpha_d [4].$$

Но из $p < 2d$ следует,

$$p - d < d, \quad \alpha_1 < \alpha_d.$$

Значит

$$F = [L(q, p_1) \cap S'' \setminus \{L(q, p_d) \cap S''\}] \neq \bar{0}.$$

Пусть $\pi_j \in F$. Тогда $\Delta p_1 \pi_j p_d$ содержит точку q .

3. Отбросим теперь в системе S_{n+1} точки p_1, π_j, p_d получим подсистему S_{n-2} . Покажем, что

$$d(q, S_{n-2}) = d - 2.$$

В самом деле

$$\overline{L(q, \pi_p, S_{n-2})} = d - 2,$$

поэтому

$$d(q, S_{n-2}) \leq n - 2.$$

С другой стороны,

$$d(q, S_{n-2}) = \min_{\nu \in S_{n-2}} \{\overline{L(q, \nu, S_{n-2})}, \overline{R(q, \nu, S_{n-2})}\} \geq$$

$$\geq \min \{\overline{L(q, \nu, S_{n+1})} - 2, \overline{R(q, \nu, S_{n+1})} - 2\} = d(q, S_{n+1}) - 2.$$

Следовательно,

$$d(q, S_{n-2}) \geq d(q, S_{n+1}) - 2 = d - 2.$$

Откуда

$$d(q, S_{n-2}) = d(q, S_{n+1}) - 2.$$

4. Пусть S_{n+1} такова, что $p < 2d$, то есть $d(q, S_{n+1}) > \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

Построим подсистему S_{n-2} , как описано в предыдущем пункте, затем, исходя из S_{n-2} так же построим S_{n-5} и так далее, до тех пор, пока не получим S_{n-3k+1} , в которой впервые

$$p_k = p - k \geq 2(d - 2k) = 2d_k,$$

то есть

$$d(q, S_{n-3k+1}) \leq \left\lfloor \frac{n - 3k}{3} \right\rfloor.$$

Таким образом, если мы покажем, что в S_{n-3k+1} существует ровно $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - k$ накрывающих треугольников, то в S_{n+1} будет равно $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ накрывающих треугольников.

5. Таким образом, остается доказать, что имеет место

Лемма 2. Если $d(q, S_{n+1}) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ и, следовательно, $p \geq 2d$, то

$$t(q, S_{n+1}) = d(q, S_{n+1}).$$

Доказательство. Введем индукцией по числу точек в системе S_{m+1} . При $m = 2, 3, 4$ лемма 2 тривиальна.

Пусть для всех $m \leq n - 3$ лемма 2 верна. Покажем, что она будет верна и для $m = n$.

В системе S_{n+1}

$$\pi_d \in L(q, \nu_d, S_{n+1}),$$

так как $d \leq \alpha_d$.

Точка $\pi_p \in R(q, \nu_d, S_{n+1})$. Следовательно, $\Delta \pi_d \pi_p \nu_d$ содержит q .

Рассмотрим подсистему S_{n-2} , полученную из S_n отбрасываем точек π_d, π_p, ν_d .

Покажем, что

$$d(q, S_{n-2}) = d(q, S_{n+1}) - 1.$$

Пусть $y \in S_{n-2}$; оценим

$$\min \{\overline{R(q, y, S_{n-2})}, \overline{L(q, y, S_{n-2})}\}.$$

Возможны три случая:

$$a) \quad \nu_d \in L(q, y, S_{n+1}); \quad \pi_p, \pi_d \in R(q, y, S_{n+1})$$

или

$$[\nu_d \in R(q, y, S_{n+1}); \quad \pi_p, \pi_d \in L(q, y, S_{n+1})].$$

Тогда

$$\overline{L(q, y, S_{n-2})} = \overline{L(q, y, S_{n+1})} \geq d - 1, \quad (7)$$

$$\overline{R(q, y, S_{n-2})} = \overline{R(q, y, S_{n+1})} - 2 \geq (p - d + 1) - 2 \geq d - 1.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $p \leq 2d$. Следовательно,

$$\overline{R(q, y, S_{n-2})} \geq d - 1. \quad (8)$$

б) Пусть

$$\pi_p \in R(q, y, S_{n+1}); \quad \pi_d, \nu_d \in L(q, y, S_{n+1})$$

$$\text{или } [\pi_p \in L(q, y, S_{n+1}); \quad \pi_d, \nu_d \in R(q, y, S_{n+1})].$$

Тогда

$$\overline{L(q, y, S_{n-2})} = \overline{L(q, y, S_{n+1})} - 2 \geq (d + 1) - 2 = d - 1. \quad (9)$$

Далее

$$\begin{aligned} \overline{R(q, y, S_{n-2})} &= \overline{R(q, y, S_{n+1})} - 1 \geq d - 1, \\ \overline{R(q, y, S_{n-2})} &\geq d - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

в) Пусть, наконец,

$$\pi_d \in L(q, y, S_{n+1}); \quad \nu_d, \pi_p \in R(q, y, S_{n+1})$$

или

$$(\pi_d \in R(q, y, S_{n+1}); \quad \nu_d, \pi_p \in L(q, y, S_{n+1})).$$

В этом случае

$$\overline{R(q, y, S_{n-2})} = \overline{R(q, y, S_{n+1})} - 2 = (d + 1) - 2 = d - 1. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\overline{L(q, y, S_{n-2})} = \overline{L(q, y, S_{n+1})} - 1 \geq d - 1. \quad (12)$$

Из (7) — (12) следует

$$d(q, S_{n-2}) = d - 1.$$

В то же время, $d_1 = d - 1$, $p_1 = p - 2$, поэтому

$$2d_1 = 2d - 2 \leq p - 2 = p_1,$$

то есть

$$2d_1 \leq p_1.$$

6. Итак, отбросив один накрывающий треугольник $\Delta \pi_d \pi_p \nu_d$, мы получили систему S_{n-2} , в которой $p_1 \geq 2d_1$.

По предположению, для S_{n-2} лемма 2 верна. Поэтому в S_{n-2} существует $t(q, S_{n-2}) = d_1$ накрывающих треугольников. Следовательно, в S_{n+1} существует $t(q, S_{n+1}) = d_1 + 1 = d$ накрывающих треугольников. Итак, лемма 2 доказана. Тем самым доказана теорема 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. Выпуклые фигуры. 1951.
2. B. J. Birch. On 3 N points in a plane. Proc. Cambridge Philos. Soc, 55, № 4 289—293, 1959.
3. Г. Г. Пестов. Аксиоматика конечных систем. Статья в настоящем сборнике.
4. Г. Г. Пестов. Некоторые экстремальные задачи теории точечных систем. Статья в настоящем сборнике.
5. Г. Г. Пестов. О некоторых числовых характеристиках точечных систем. Статья в настоящем сборнике.